

空気塊の断熱膨張

－演示実験のモデル化－

三野 祐加子*, 成行 泰裕

Adiabatic Expansion of Air Parcels -Modeling of a Demonstration-

Yukako MINO, Yasuhiro NARIYUKI

E-mail: nariyuki@edu.u-toyama.ac.jp

Abstract

In this short note, modeling of adiabatic expansion of air parcels by using an expanding box model (EBM) is discussed. It is shown that uniformly accelerating EBMs can be good analytical models to describe the adiabatic expansion in a demonstration experiment. Theoretical backgrounds of EBMs are briefly summarized in Appendix.

キーワード：断熱膨張, 熱力学, 流体力学, 理科, 膨張箱モデル

keywords: Adiabatic Expansion, Thermodynamics, Hydrodynamics, Science, Expanding box model

1. はじめに

小学校三年生から中学校三年生までの理科の授業の中で、熱・温度に関する学習は水の状態変化や雲の発生、金属の加熱の中で取り扱われる^[1]。そこでの冷却過程の学習は直接的な熱の授受や状態変化に伴うものを中心であるが、唯一雲の発生に関連して熱の授受を伴わない冷却過程（断熱膨張過程）が取りあげられている。断熱膨張過程は、準静的過程を考える場合可逆過程になる^[2]。

中学校の理科は現在1分野と2分野に分けられており、主に1分野は物理・化学、2分野は生物・地学の内容で構成されている。本研究の題材である断熱膨張は物理学（熱力学）の知識であるが、上位概念である雲の発生の中で、地学の2分野として教科書では扱われている。特に、静水圧平衡による圧力低下と混合して記述されることは、雲の生成過程における断熱過程の正確な認識を妨げる可能性がある。2009年の長嶋による報告^[3]では、中学校の単元「天気とその変化」に関連する実践として、雲の発生の理解において下位概念である断熱膨張の理解が重要であることを指摘している。これらの断熱変化による温度の上下は、熱力学第一法則（エネルギー保存則）から理解されるものであり、初等中等教育段階

においてもこの知識と矛盾しないような理解が求められる。しかしながら、近年 Leinonen ら^[4]によって東フィンランド大学二年生の断熱過程の説明に対する調査研究が報告されたが、そこでは大学生においても熱力学第一法則を用いたものはおよそ一割で、ガスのモデル（運動論）や、ボイル・シャルルの法則（状態方程式）を用いた誤った説明をなされたものがほとんどであることが報告された。近年になり、ミクロスケールを扱う統計力学は熱力学との整合性によって正当化されることが強調されるようになったが^[5]、Leinonen らの報告は正にこの点に関わる事例として捉えられる。ここでも問題になるのは、熱力学特有の概念と他の概念との混同である。断熱膨張・圧縮は、本質的には熱力学第一法則に基づく内部エネルギーと力学的エネルギーの変換過程であり、物質の詳細はパラメータとして法則に反映される。

温度と力学仕事の関係性については、外力による膨張過程における雲の発生などの演示が教育実践の場で既に多く行われており、山根・山川^[6]らに指摘されたような問題点はあるものの、実験方法そのものはある程度確立していると言え、多くの実践が行われている^[3,6,7]。一方で、これらの実践を通じて熱力学第一法則を初等中等教育の知識へそのまま変換するのは難しい。一つには、温度と内部エネルギーを結びつけるための熱容量や示強性・示量性の概念が

*平成26年3月卒業

備わっていないため、内部エネルギーの知識をそのまま使うことが難しいためである。もう一つは、手で圧縮・膨張過程を生じさせる場合、作業の中の力学仕事を定性的に理解したとしても、エネルギーの変換過程の定量的理解まで到達し難いためである。実際、演示実験における力学仕事のモデルはあまり議論されていない。演示実験における力学仕事が地球大気における鉛直方向の圧力勾配の代替であったことを考えると、静水圧平衡^[8]に相当するような簡易なモデルが存在することが望ましい。

本研究ノートでは、断熱膨張の演示実験における温度変化と力学的エネルギーの変化を定量的かつ明示的に結び付けるためのモデルとして、膨張箱モデルの適用を議論した結果を報告する。2章では膨張箱モデルの概要を紹介し、3章ではモデルを適用するために行った実験と適用結果について述べる。4章では今後の課題について述べる。また、付録において膨張箱モデルの詳細を述べる。

2. 膨張箱モデル

演示実験に対応する簡単なモデルとして、本研究では1993年にGrappinら^[9]が提唱した膨張箱モデルを用いて断熱膨張過程を近似する。

Grappinら^[9]は太陽から放射状に吹き出るガスの2次元的な膨張を議論していたが、ここではある時間の一辺の長さ R 、体積 R^3 の箱の中の理想気体の3次元的な膨張を考える(Appendix A)。膨張率を $a = R/R_0$ (R_0 :初期の長さ)とすると ρ (数密度) $= V^{-1}$ (体積) $= \rho_0 a^{-3}$ である。断熱準静的過程を考えると熱力学第一法則 $\Delta U = W = -PdV$ より、ポアソンの式 $TV^{\gamma-1} = \text{一定}$ (γ :比熱比)が求まる^[8]。温度の低下はポアソンの式に従うがこれは外に仕事をした分だけ ΔU が減り温度が下がることに対応している。準静的過程の仮定のもと、この仕事は厳密に計算できる。空気の比熱比 $\gamma \cong 1.4$ よりポアソンの式に代入すると $T = C_0 \rho^{\gamma-1} = T_0 a^{-1.2}$ となる。つまり、

$$a = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{5}{6}} \quad (1)$$

となる。ただし、後述するように式(1)の正確な定義は付録で述べる(Appendix B)。ここでは、もっとも簡単なモデルとして加速度膨張する膨張箱 $a(t) = A_0 t^2 + V_0 t + 1$ を考える。実験より得られたデータを (T_0/T) に代入すると、近似曲線より膨張箱の膨張

速度がわかる。過去の研究^[9]では等速膨張を仮定しているが、本研究では式(1)右辺のような加速度まで含んだ等加速度膨張のモデルを用いて実験データの近似を行う。また、ポアソンの式の温度は理想気体温度であり単位はケルビン[K]であるが、以下の議論ではセルシウス温度[°C]を用いている。これは、中学理科では絶対温度について学習していない可能性があるためである^[1]。付録(Appendix A)で述べるように、セルシウス温度で評価した式を用いることで、絶対温度で評価した式も減速する膨張箱を示す2次曲線で良く近似することが出来る。

3. 実験方法

本実験で用いる実験装置は、

- 手動の真空ポンプ(ケニス株式会社)
- 真空容器(ケニス株式会社)
- ビニール袋 [約92cm³]
- サイエンスキューブ、温度センサ(ケニス株式会社)

で構成されている。

以下に実験方法を示す。以下に紹介する実験は、通常の中学校などで行われている実験と同等の簡単なものである。

まず装置をつなぎ合わせ、温度センサーをつけた小さな袋を真空容器に入れ密封し、真空ポンプを往復4秒・6秒・8秒で各10回ずつ引く。温度を120秒間測定し、それぞれ実験を10回繰り返す。得られたデータより、引き終わり付近から極小値をとるまで(冷却が終わるまで)の温度データを抜き出す。各データに対し、初期の温度で規格化して平均をだす。得られたデータに対し、膨張箱モデルを使って解釈を試みる。

4. 実験結果の近似

以下ではまず、往復4秒でピストンを引いたときのデータについて述べる。図1は縦軸が膨張率、横軸がピストンを引き終わってからの時間である。今回の場合は50秒で冷却が終わるため、ピストンを引き終わる $t_0=50$ より、 $t_a=80-50=30$ の間で近似を行った。二次関数で実験データは

$$a = -1.0 \times 10^{-5} t_a^2 + 5.4 \times 10^{-4} t_a + 1.00015 \quad (2)$$

と近似される(図1)。このときデータと近似曲線の決定係数 R^2 は0.9907である。

次に、往復8秒でピストンを引いたときのデータ

について述べる。ここでは $t_a = 119 - 90 = 29$ まで近似を行った。この場合、二次関数で実験データは

$$a = -6.7 \times 10^{-6} t_a^2 + 2.6 \times 10^{-4} t_a + 1.0006 \quad (3)$$

と近似される (図 2)。このとき $R^2 = 0.8956$ である。

往復 8 秒の場合も、 a は上に凸の近似曲線になることから、膨張が時間と共に減速していくということがわかる。ただし往復 8 秒の場合はデータの分解能も悪く、相関も往復 4 秒の場合よりも低くなっている。

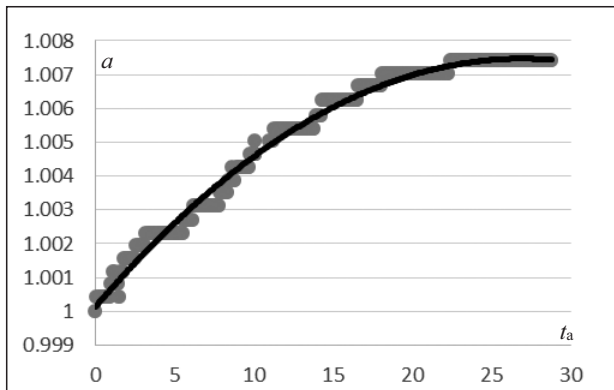


図 1 往復 4 秒のときの実験結果 (丸が実験データを用いて式 (1) から求めた値, 黒い実線が式 (2) の近似曲線)

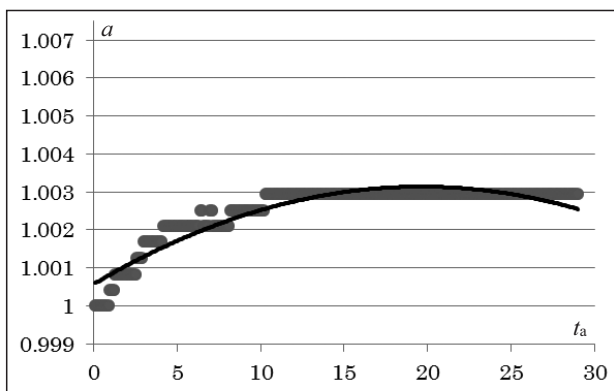


図 2 往復 8 秒のときの実験結果 (丸が実験データを用いて式 (1) から求めた値, 黒い実線が式 (3) の近似曲線)

実験より、演示実験中の温度変化を膨張速度が等加速度で減速する膨張箱で近似できるということがわかった。実際の空気塊においても、上昇の限界が圏界面付近であるため^[8]、空気塊の運動速度の減少に伴う減速膨張は実際に生じていると考えられる。実験のデータは 2 次関数での近似を行った。3 次・4 次などで近似を行えば精度は良くなるが、次数をあげて相関係数の値を上げると、その分パラメータ

が増加する。精度にあまり差がなければ、極力パラメータの少ないシンプルなモデルの方が有用性が高いため、本研究では 2 次関数での近似を用いた。

5. 結論・展望

空気塊の断熱膨張は、中学校 2 年理科地学分野の雲の生成で取り扱われている。雲の生成にはいろいろな要因が絡んでくるが、現教材では雲の生成要因の一つである空気塊の断熱膨張に焦点が当たりにくくなっている。

本研究では、雲の発生の下位概念である断熱膨張の存在を明確化するための、新しい物理モデルの提案を行なった。実験により得られたデータから、実際の雲の生成で重要な空気塊の断熱膨張過程の演示実験のモデルとして、膨張箱を用いることが出来ることを示した。膨張箱モデルは、力学的エネルギーと内部エネルギー、温度変化の関係を厳密に示すことが出来るモデルであり、静水圧平衡の代わりとして用いることが出来る。

膨張箱モデルを用いることで、力学的エネルギーと内部エネルギー、温度変化の関係を厳密に示すことが出来る。本研究は雲の生成過程における空気塊の断熱膨張に焦点を当てたが、雲の生成には他にもいろいろな学習要素が含まれている。また、雲は最先端科学で、多種多様な視点からの研究がなされている^[10]。それぞれの分野が進展し、多くの研究分野・手法が統合的に議論されれば新しい理解がうまれるため、研究・学習内容が広がっていくであろう題材である。

謝辞

有益なコメントを下さった田上教授に感謝申し上げます。本研究の一部は平成 25 年度富山大学人間発達科学部学部長裁量経費の援助を受けて行われました。

参考文献

- [1] 中学校学習指導要領解説 理科編, 2008; 小学校学習指導要領解説 理科編, 2008.
- [2] 佐々真一, 熱力学入門, 共立出版, 2000.
- [3] 長嶋淳, 神奈川県立総合教育センター 長期研究員研究報告, 7, 37, 2009.
- [4] R. Leinonen, et al., Res. Sci. Educ., 42(6), 1165, 2012.

- [5] 佐々真一, 日経サイエンス, 2, 2014.
- [6] 山根津貴子, 山川亮, 物理教育, 57(3), 231, 2009.
- [7] 佐藤昇, 大阪と科学教育, 20, 2006.
- [8] 小倉義光, 一般気象学 (第2版), 東京大学出版会, 2009.
- [9] R. Grappin, M. Velli, and A. Mangeney, Phys. Rev. Lett., 70 (14), 2190, 1993.
- [10] 地球電磁気学・地球惑星圏学会, 地球電磁気学・地球惑星圏科学の現状と将来, 2013.
- [11] 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻編, 地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店, 2001.
- [12] 早川尚男, 非平衡統計力学, サイエンス社 SGC ライブラリ 54, 2007.
- [13] E.クライツィグ, 常微分方程式 (原著第5版), 培風館, 2002.
- [14] E.クライツィグ, 数値解析 (原著第8版), 培風館, 2009.
- [15] 霜田光一ほか, 中学校科学2, 学校図書, 2013.
- [16] 国清, 木本, 長尾, 水力学 (改定・SI版), 森北出版, 2003.
- [17] 中谷宇吉郎, 科学の方法, 岩波書店, 1958.
- [18] 関東地区連絡会・入試検討委員会, 物理教育, 62(3), 192, 2014.
- [19] 寺沢寛一, 自然科学者のための数学概論, 岩波書店, 1983.

Appendix A

流体方程式系 (オイラー方程式系)^[11]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{A1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{F} = 0, \quad (\text{A2})$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A3})$$

を基礎方程式とする。質量は規格化している。本稿では定常的でバルク速度の無い現象を扱うので, (A2) は結果に寄与しない。

ここでは膨張の仕方が等方的であるとして, 次のような座標変換を考える:

$$\mathbf{x} = a(t) \mathbf{x}' \quad (\text{A4})$$

$a(t)$ は膨張率であり, 系の外部からの膨張・圧縮を

定める。(A4) を時間微分 (物質微分) すると,

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{a} \mathbf{x}' + a \dot{\mathbf{x}}' \quad (\text{A5})$$

となる。右辺第1項が背景場の膨張速度, 右辺第2項が \mathbf{x}' 系での速度 \mathbf{u}' である。(A1)-(A3) に (A4) (A5) の座標変換を施すと以下の方程式が得られる:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = -\frac{3\dot{a}}{a} \rho, \quad (\text{A6})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{F} = -\frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u} - \ddot{a} \mathbf{x}, \quad (\text{A7})$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{3\gamma \dot{a}}{a} p. \quad (\text{A8})$$

式 (A6)-(A8) の右辺は, 座標変換により現れた一種の慣性力を表す。ただし, 'は省略している。 ∇ は元の定義を a で割ったもので定義されている。

流れが無い場合を考えると, (A6) より $\rho = \rho_0 a^{-3}$ が得られる。また, (A6), (A8) および理想気体の状態方程式より

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{3(\gamma-1)\dot{a}}{a} T \quad (\text{A9})$$

を得る。これより, $T = C_0 \rho^{\gamma-1}$ も容易に確認できる。等加速度膨張 (または圧縮) の場合, $a(t) = A_0 t^2 + V_0 t + I$ となる。

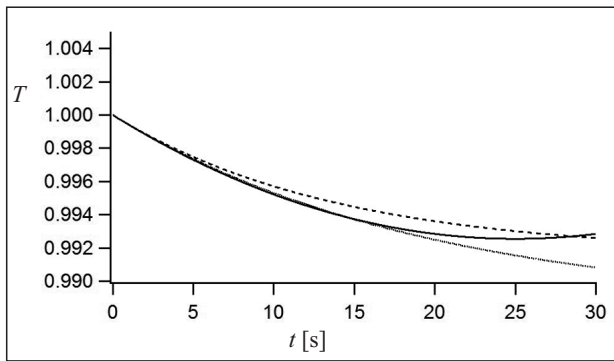
式 (A9) では右辺の膨張率に含まれる加速度項が系の緩和を外部からの仕事として取り込んでいる。一方で, BGK 方程式^[12] の衝突項に対応させる形で初期の温度 (=外界の温度) T_0 を平衡温度とした緩和項を以下のように導入することは容易である:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{3(\gamma-1)\dot{a}}{a} T - \nu(T - T_0). \quad (\text{A10})$$

右辺第一項が無視出来る時, 式 (A10) はニュートンの冷却法則^[13] になる。

図 A1 の黒い実線は式 (A9) で等加速度膨張を仮定した場合の温度の時間変化を示しており, 図1の近似曲線に対応している。ただしここでは比較のため4章で用いたセルシウス温度で定義した式(2)をそのまま用いており, 厳密な取扱ではないことに注意されたい。点線および灰色線は等速膨張を仮定した式 (A10) から求めた温度の時間変化である。式 (A10) は4次のルンゲクッタ法^[14] を用いて数値的に解いている。係数 ν の値によってはある時間までは (A10) でも近似曲線を良く再現するが, 時間が経

つとずれが大きくなることが分かる。



図A1 各モデルにおける温度の時間変化（黒い実線：等加速度膨張を仮定した式 (A9)，黒い点線：等速膨張を仮定した式 (A10) ($v=0.07$)，灰色線：等速膨張を仮定した式 (A10) ($v=0.05$)。温度 T (縦軸) は初期の温度で規格化している。)

最後に、4章の議論を絶対温度を用いた議論と対応付ける。ポアソンの式の温度 T_i [K]，上記の議論で用いたセルシウス温度 T [°C]，絶対温度を用いた際に求まる膨張率を d とすると、

$$T_i d^{3(\gamma-1)} = (T+273.15) d^{3(\gamma-1)} = T_0 \quad (\text{A11})$$

となる。 T_0 [K] は初期の温度である。この式に式 (2) の膨張率 a と典型的な初期温度 T_0 (ここでは 295.85 [K]) を与えると、膨張率 d が得られる。得られた膨張率を a と同様に 2 次曲線で近似すると、

$$d = -0.8 \times 10^{-6} t^2 + 4.2 \times 10^{-5} t + 1.0 \quad (\text{A12})$$

が得られる。このとき $R^2=0.99999$ であり、 a が 2 次曲線で近似される場合、 d も下に凸の二次曲線で近似できるとして差し支えないことが分かる。このような換算式 (A12) は、学習内容に制約がある学校教育課程と標準的な形の物理法則を繋ぐものとして有用になり得る。

式 (A12) の係数は式 (2) のものと定量的には異なるが、本モデルが中学理科における定量的な評価へ適用されることを想定したものではないことに注意されたい。ここでの定式化の目的は、授業者に対して演示実験内の温度変化に対する具体的な物理モデル（減速膨張する箱）を与えることである。図A1で示すように、減速を考えない場合でも、ある時間範囲内では熱伝導による効果を用いることで良く近似できる。また、実際の演示実験では熱伝導による温度変化の影響も大きいと考えられる。ただし、「断熱膨張の演示実験」である以上、熱伝導を含まないモデルが存在する方が望ましい。本研究ノート

で報告したモデルは、気象学における静水圧平衡および断熱準静的過程を仮定した基礎理論^[8]に対応するものであり、そのような要請を満たすものである。もちろん、熱伝導による温度変化の可能性がある場合は、それぞれのモデルに基づいた説明を行うことが望ましい。ただし、断熱膨張の学習においては、それらが混同されることは避けられなければならない。

このような学習者に対し定性的な描像を与えるモデルの具体例としては、電気回路の学習における水流モデル（電流と水の流れのアナロジー）^[15] が挙げられる。水流モデルにおいても、電気抵抗に対応する水路における損失^[16] や水車の役割などを具体的に定義したより厳密なモデルは存在し得るが、それは定性的な描像を与える段階において必要なものではない。無論、次段落でも述べるように、定性的な描像であってもその範囲内でより厳密なモデルと整合している必要がある。本研究ノートで述べたモデルの中学理科授業に対する寄与・活用として最も期待されるのは、熱を介さない仕事と熱エネルギーの変換（断熱過程）の「おもちゃモデル (Toy model)」としての役割であり、外力（力学モデル）や仮定する物質の詳細については学習範囲の制約のない、学校教育と切り離れた話として論じなければならない。

モデルの定量的な精密化を目指す場合は、学習範囲への考慮とともに、演示実験に含まれる様々な系統誤差の要因に対しても注意が必要となる。例えば、本研究の実験では真空容器内にビニール袋を入れ、その袋内の温度変化を計測したが、これは物質量が一定であるという基礎理論の仮定と揃えるためである。また、良く用いられるゴム風船^[15] においては、ゴムの弾性エネルギーを考慮したモデル化が必要になる。さらに、温度変化による雲の発生まで演示実験に含める場合、水蒸気による熱力学的パラメータへの影響に加え、潜熱等も考慮する必要がある^[12,8]。通常の中・高理科の授業内でこのような細かい点に注意を払いつつ断熱膨張の実験を行うことは極めて困難であると考えられる。ここで留意すべきは、中谷宇吉郎の随筆^[17] で述べられているような、知識体系に対する整合性を通じた再現可能性の担保である。授業者が学習課程と標準的な科学知識の間の関連性を正確に把握することによって、そのような再現性はある程度自ずと担保されていることに注意されたい。ただし、断熱膨張に関しては高校物理の範囲で

ボアソンの式の取り扱いが議論されている現状があり^[18]，大学の教員養成課程においては特にフォローアップが必要な単元の一つである。

Appendix B

本研究で用いた式 (1) の正確な定義は

$$a = \left\langle \frac{T}{T_0} \right\rangle^{-\frac{5}{6}} \quad (\text{B1})$$

である。ここで、 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を示す。 $T > 0$ において a は凸関数^[19] なので，凸関数の性質 (Jensen の不等式^[12]) より，以下の不等式が成立する：

$$a \leq \left\langle \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\frac{5}{6}} \right\rangle. \quad (\text{B2})$$

つまり，本稿で議論している膨張率は (B2) 右辺で定義される膨張率の最小値に当たる。

(2014年10月17日受付)

(2014年12月10日受理)